Олимпиада
школьников по математике
«ТИИМ-2023»
Заключительный тур
12 февраля 2023 года
6 класс

▷ **1.** Найдите наименьшее натуральное число, которое оканчивается на 17, делится на 17 и имеет сумму цифр, равную 17.

Решение: Вычтем из искомого числа 17. Разность оканчивается двумя нулями, делится на 17 и имеет сумму цифр, равную 9. Два последних свойства сохраняется в том случае, если два нуля, которыми оканчивается разность, вычеркнуть. Значит, достаточно найти наименьшее число, которое делится на 17 и имеет сумму цифр, равную 9, а потом приписать к нему сзади 17. Выписывая подряд числа, делящиеся на 17, находим, что наименьшее из них с суммой цифр, равной 9, - это 153. Отсюда - ответ.
Ответ: 15317.

▷ **2.** На дороге между горными селениями A и B нет горизонтальных участков. Машина без остановок проехала по ней от A до B и вернулась в A, потратив на весь путь 6 часов. При этом в гору она всегда ехала со скоростью 15 км/ч, а под гору со скоростью 30 км/ч. Чему равна длина дороги?

Решение: Пусть длина дороги равна x км. Тогда в гору машина ехала $x/15$ часов, а под гору $x/30$ часов. Поскольку на весь путь у неё ушло 6 часов, имеем $x/15 + x/30 = 6$, откуда $x = 60$ км.
Ответ: 60.

▷ **3.** Коля поймал за 5 дней 512 мух. Каждый день он отлавливал столько мух, сколько во все предыдущие дни вместе. Сколько мух поймал он за каждый из этих дней?

Решение: За последний день он поймал столько мух, сколько в первые 4 дня, то есть половину всех мух. В четвертый день - половину мух, пойманных за 4 дня. И так далее.
Ответ: В пятый день 256, в четвёртый 128, в третий 64б во второй 32, в первый 32.

▷ **4.** Выписаны подряд все числа от 1 до 60, без пробелов между цифрами: 123456789101112...585960. Надо вычеркнуть 100 цифр, чтобы оставшееся число оказалось наименьшим.

Решение: Всего выписано 111 цифр (9 - на однозначные числа и ещё 102 на 51 двузначное число). Значит, после вычёркивания 100 цифр останется 11-ти значное число. Чтобы оно было самым маленьким, нужно поставить в нём на первое место 1, а на последующие - нули. Однако нулей в нашей записи всего 6. Если мы выпишем их все, то за последним нулём цифр уже не останется. Попробуем оставить нули только от чисел 10, 20, 30, 40 и 50. Тогда у нас получится такое число: 1000005152535455565758596O. От него можно оставить после 100000 ещё 5 цифр. Так как нуль поставить нельзя, поставим самую маленькую из возможных - 1, вычеркнуув первую пятёрку после пяти нулей. Теперь можно вычеркнуть ещё три пятёрки, оставляя следующие за ними цифры: 10000012340.
Ответ: 10000012340.

▷ **5.** Пусть запись $a\triangle b$ обозначает наибольшее из чисел $2a$ и $a+b$. Решите уравнение $x\triangle 3 = 5\triangle x$

Решение: Запись $x\triangle 3$ может означать либо $2x$ (если $x \geqslant 3$), либо $x+3$(если $x \leqslant 3$). Запись $5\triangle x$ - либо 10 (если $x \leqslant 5$), либо $5+x$(если $x \geqslant 5$). Поэтому наше уравнение выглядит так: $2x = 10$ (если $3 \leqslant x \leqslant 5$), либо $x+3 = 10$ (если $x \leqslant 3$), либо $2x = 5 + x$ (если $x \geqslant 5$).
Первое уравнение даёт ответ 5, отвечающий условию $3 \leqslant x \leqslant 5$, второе - ответ 7, не отвечающий условию $x \leqslant 3$, третье - ответ 5, отвечающий условию $x \geqslant 5$. Следовательно, $x = 5$
Ответ: 5.

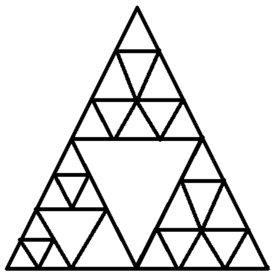
▷ **6.** Имеется много жетонов стоимостью 3 тугрика и два жетона по 5 тугриков. Можно ли составить сумму 2023 тугриков с помощью этих жетонов?

Решение: Сумму в 8 тугриков составляем как 3 + 5, в 9 как 3 + 3 + 3, сумму в 10 тугриков как 5 + 5. Любую сумму больше добиваем n жетонами по 3..
Проверяем любое число на остаток на деление на 3. Если остаток 1 (как для числа 10), то можно разбить выражением $5\cdot 2+3n$. Если остаток 2 (как для числа 8), то можно разбить выражением $5+3(n+1)$. Если остаток 3, то - $3n$. 2023 при делении на 3 даёт остаток 1. Следовательно, данную сумму можно собрать из $5\cdot 2 + 3\cdot 671$, с помощью двух жетонов по 5 тугриков, и 671 жетона по 3 тугрика.
Ответ: Да.

▷ **7.** Можно ли разрезать правильный треугольник на 29 правильных треугольников?

Решение: Да, можно. Как это сделать:

$$1 \Rightarrow 4 \Rightarrow 3+9 = 12 \Rightarrow 11+9 = 20 \Rightarrow 19+4 = 23 \Rightarrow 21+8 = 29$$



Ответ: Да.

▷ **8.** В 2023 году городу-"миллионнику"Перми исполняется 300 лет. Докажите, что найдётся в этом славном городе, по крайней мере, 25 человек у которых совпадают инициалы (начальные буквы фамилии, имени и отчества).

Решение: Всего в русском языке 33 буквы. Некоторые буквы не могут быть инициалами, но посчитаем их тоже для оценки сверху. Всего вариаций $N = 33^3 = 35937$.
$35937 \cdot 25 = 898425, , 898425 < 1000000$.

▷ **9.** Какое количество различных по весу гирь (целое количество граммов) необходимо иметь продавцу, чтобы он мог точно отмерить любое целое количество граммов (от 1 до 2023), на двучашечных весах, если разрешается гири ставить на обе чаши весов?

Решение: Запись о взвешивании одного килограмма может быть такой : $0\ 0\ 0\ 1_3$. Взешивание двух килограммов требует использования двух гирь - $0\,0\,1\ -1_3$.
Взвешивание груза в 5 кг: $0\ 1\ \ -1\ \ -1_3$. Эта запись означает, что на пустую чашку помещена гиря, масса которой равна единице третьего разряда в троичной системе исчисления, то есть 9, а на чашку с грузом помещены гири в 1 и 3 кг.
Аналогично, следует, что результат любого взвешивания на чашечных весах выражается числом, записанным в системе счисления с основанием 3 и с алфавитом, состоящим из -1, 0 и 1. Следовательно, хватит гирь 1, 3, $3^2 = 9$, $3^3 = 27$, $3^4 = 81$, $3^5 = 243$, $3^6 = 729$.
Ответ: 7.

▷ **10.** В ящике 2023 шариков. Каждый из двух играющих по очереди вынимает из ящика от 1 до 7 шариков. Выигрывает взявший последний шарик. Кто выиграет при правильной игре, начинающий или второй игрок?

Решение: Выигрывает тот, кто возьмёт 2023-й шарик, следовательно тот, кто возьмёт 2015-й шарик.
$2023 = 8 \cdot 252 + 7$ Выигрывает начинающий, если он возмёт семь шариков и затем будет дополнять до 8-ти число шариков взятых партнёром.
Ответ: Первый игрок.